

基于三维裂纹尖端应力场的 应力强度因子计算方法

贾旭¹, 胡绪腾¹, 宋迎东^{1,2}

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院

江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016;

2. 南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 提出一种基于无限大体裂纹尖端弹性应力场理论解的前几项多项式函数, 对实际裂纹体弹性应力场有限元解进行拟合来计算应力强度因子的方法. 该方法在计算应力强度因子时不需要预先假设裂纹尖端的应力应变状态, 应力强度因子计算结果更符合三维裂纹体裂纹尖端实际的应力应变状态. 首先基于二维无限大板中心穿透裂纹应力场理论解验证了方法的有效性, 探讨了拟合确定应力强度因子需要的多项式应力函数的项数. 然后分别以二维大板中心穿透裂纹、三维大体内埋圆裂纹和三维有限厚板中心穿透裂纹的应力强度因子计算为例, 通过与无限大板和无限大体应力强度因子理论解以及基于位移外推法和1/4节点张开位移法的应力强度因子有限元解的对比分析, 验证了该方法的有效性和合理性. 研究表明该方法能够合理反映三维裂纹体裂纹尖端的实际应力应变状态, 计算得到的应力强度因子数值更合理.

关 键 词: 三维裂纹; 裂纹尖端应力场; 应力强度因子; 有限元法; 位移外推法; 1/4节点张开位移法
中图分类号: V231; O346.1 **文献标志码:** A

Calculation method of stress intensity factor based on the three-dimensional stress field at the crack tip

JIA Xu¹, HU Xu-teng¹, SONG Ying-dong^{1,2}

(1. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System,

College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: An approach for calculating stress intensity factors was proposed based on the first several items of the theoretical polynomial solution of the elastic crack tip stress field in infinite body, and the stress intensity factors were calculated by fitting the finite element solution of elastic crack tip stress field in actual crack bodies. This method did not need assuming the stress and strain state at crack tip in calculated of stress intensity factors, and the calculated results were more in line with the actual stress and strain state in the three-dimensional crack bodies. First, the availability of this method was validated based on the theoretical solution of center-through-crack stress field in a two-dimensional infinite plate, and the fitting item of the polynomial function to determine the stress intensity factors was explored. Then by calculating the stress intensity factors of center through crack in two-dimensional infinite plate, embedded circle crack in three-dimensional infinite body and center through

crack in three-dimensional finite thickness plate, the validity and rationality of the proposed method had been verified by comparative analysis with theoretical solutions of the infinite plate and infinite body, and also with the finite element solutions based on displacement extrapolation method and 1/4 point opening displacement method. Studies show that this method can reasonably reflect the actual stress and strain state of crack tip in three dimensional crack bodies, and the calculated stress intensity factors are more reasonable.

Key words: three-dimensional crack body; crack tip stress field;
stress intensity factor; finite element method;
displacement extrapolation method;
1/4 point opening displacement method

20 世纪 70 年代以来,随着线弹性断裂力学理论的成熟和对结构安全性要求的不断提高,损伤容限设计成为航空飞行器和航空发动机关键结构的必要设计准则之一. 损伤容限设计的基础是裂纹扩展分析,而裂纹扩展分析的关键问题之一在于准确计算结构危险部位裂纹尖端的应力强度因子 K .

众所周知,对实际工程结构一般不存在 K 的闭合解. 所以为方便计算 K ,国内外已出版了多套应力强度因子手册^[1-3],但不能完全满足复杂工程结构损伤容限设计分析的需要. 随着计算机技术不断地发展,有限元方法(FEM)逐渐成为计算复杂工程结构裂纹尖端应力强度因子的基本手段,发展了许多基于有限元法的应力强度因子数值计算方法,如位移外推法,1/4 节点位移法^[4]、J 积分与等效积分区域法、虚拟裂纹扩展法与闭合法、应力外推法、节点力法^[5]等. 前 4 种方法的理论基础是裂纹面张开位移、J 积分或能量释放率与应力强度因子 K 之间的函数关系^[6],应用方便,尤其是 J 积分法和虚拟裂纹闭合法对裂纹尖端的网格尺寸并不敏感. 但是这 4 种方法所采用的“函数关系”只有在平面应变或平面应力假设下才存在显式表达式. 即这 4 种方法的前提是预先假设裂纹前缘为平面应变或平面应力状态,这显然与实际结构中裂纹前缘的应力、应变状态不完全相符. 与以上 4 种方法不同,节点力法和应力外推法直接通过裂纹前沿方向上的节点力和节点应力确定 K . 这两种方法分别假设非奇异点的节点力或应力与相应的“非奇异 K ”之间存在线性关系,然后采用最小二乘法外推得到所需要的“奇异 K ”. Raju 和 Newman 在文献[7]中如此评价节点力法:节点力法相比基于裂纹面张开位移方法的最大优势是不需要预先假设平面应力或平面应变状态. 所以理论上节点力法和应力外推法更适用

于三维裂纹问题. 然而这两种方法也存在一定的不足^[6]:靠近裂纹尖端的有限元计算数据往往不十分可靠,是造成误差的主要来源,这与应力强度因子 K 反应裂纹尖端应力的奇异性在逻辑上相悖,如何取舍引起误差的裂纹尖端有限元数据具有不确定性.

随着裂纹扩展试验研究的不断发展,人们发现裂纹前缘几何(tunneling 效应^[8])、前沿应力状态等三维效应日益制约着二维断裂理论在损伤容限设计中的应用. 然而迄今为止,工程中计算 K 时仍广泛接受:厚板或裂纹体内部假设为平面应变状态,薄板或裂纹体表面假设为平面应力状态. 例如平面断裂韧性测试标准(ASTM-E399^[9])将断裂韧性试样的整个裂纹前沿假设为平面应变状态.

将整个裂纹前沿假设为平面应变或平面应力两种极端情况,势必对 K 造成不可避免的误差. 在实际三维裂纹体中,裂纹前缘应力场呈现出不同的应力状态,特别是裂纹与自由表面相交的区域内既不是平面应变状态也不是平面应力状态^[10]. 在相同的初始裂纹形状、尺寸以及相同的加载频率、波形的条件下,裂纹前缘形状的发展与疲劳裂纹扩展率控制参数 K 沿裂纹前缘的分布密切相关. 而基于平面应力或平面应变假设的应力强度因子数值计算方法必然影响三维裂纹前缘应力强度因子分布的准确性. 所以在三维裂纹扩展过程数值模拟中裂纹前缘形状越来越受到国内外学者^[11-12]关注的今天,有必要发展一种既能够考虑裂纹前缘不同应力状态、又能准确计算应力强度因子的计算方法.

借鉴节点力法和应力外推法中不需要预先假设裂纹尖端的应力状态的思想,本文通过对线弹性断裂力学中无限大体裂纹尖端弹性应力场的理论解的分析,提出了一种对实际裂纹体弹性应力场有限元解进行拟合来计算三维裂纹应力强度因子的

新方法,并采用典型I型裂纹算例对方法的有效性和收敛性等进行了分析和验证.新方法对其他类型裂纹和复合型裂纹的适用性将进一步的研究.

1 方法提出

1.1 无限大体裂纹尖端应力场的理论解

线弹性断裂力学理论发展至今,仅获得了少数含裂纹的无限大/半无限大板、无限大/半无限大体裂纹尖端应力场的理论解.但这些特殊裂纹体应力场的理论解却为实际结构裂纹应力强度因子的数值计算提供了重要的理论依据.

对于二维弹性无限大板I型、中心穿透裂纹,其裂纹尖端极坐标系如图1所示.

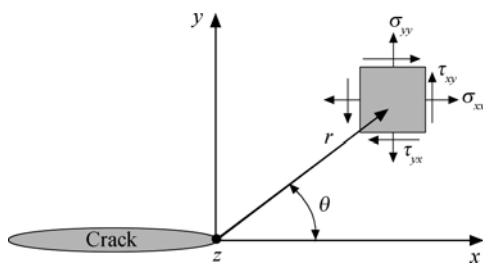


图1 二维裂纹尖端坐标系

Fig. 1 Coordinate system at 2-D crack tip

当其承受远端拉伸应力时,沿裂纹前沿方向($\theta=0^\circ$ 方向)上的应力分布^[13]为

$$\sigma_y = \sigma_{\theta\theta} \big|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + a_1 r^{0.5} + a_2 r^{1.5} + a_3 r^{2.5} + \dots \quad (1)$$

$$\sigma_x = \sigma_{rr} \big|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + T + b_1 r^{0.5} + b_1 r + b_2 r^{1.5} + b_2 r^2 + \dots \quad (2)$$

其中式(1)和式(2)的第一项为应力奇异项, K_I 为I型应力强度因子, T 为常数 T 应力项, a_1, a_2, b_1, b_2 等为 Williams 展开项系数.

对于承受远端均匀拉伸载荷的三维无限大体内埋圆裂纹(如图2),其中 c 为圆裂纹的半径.根据 Sneddon^[14]的工作,沿裂纹面前沿方向上($z=0$)的应力场奇异项为

$$\sigma_r = \sigma_z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi d}} \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi d}} \quad (4)$$

式中 ν 为泊松比, d 为距离裂纹前缘的法向距离.尽管 Sneddon 没有给出三维无限大体内埋圆裂纹尖端完整的应力分布表达式,但其多项式展开

式的形式应该与上述二维问题是一致的.

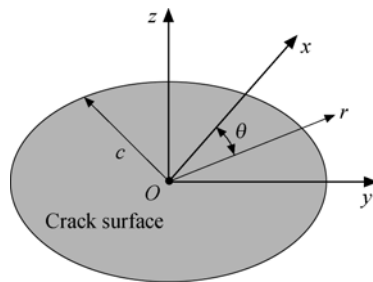


图2 三维内埋圆裂纹的坐标系

Fig. 2 Coordinate system of 3-D embedded circular crack

1.2 计算应力强度因子的新方法

对于有限尺寸的实际含裂纹结构,虽无法获得其裂纹尖端应力分布的解析解,但裂纹前沿方向($\theta=0^\circ$ 方向)上的应力分布规律理论上应符合式(1)的特点.由于裂纹尖端理论弹性应力分布的奇异性,由应力强度因子确定的应力奇异项在靠近裂纹尖端很小的区域内基本代表了裂纹尖端的实际应力分布.若同时考虑几项更高阶的非奇异项,那么由奇异项和前几项非奇异项决定的应力将可能在较大的范围内代表裂纹前沿方向上的实际应力分布.因此,若能够较准确地获得实际裂纹体裂纹尖端一定范围内的弹性应力分布,可根据式(1)中的应力奇异项和前几项非奇异项来反推确定应力强度因子.而实际裂纹体裂纹尖端一定范围内的弹性应力分布可通过有限元方法较准确地计算获得.由此提出如下一种新的基于有限元的应力强度因子计算方法:对实际含裂纹结构,采用有限元法计算其裂纹尖端前沿方向上的弹性应力场,然后将无限大体裂纹尖端弹性应力场理论解的奇异项加上前几项非奇异项表示的多项式函数作为拟合公式,应力强度因子和非奇异项的系数作为待定系数,通过拟合裂纹尖端有限元节点弹性应力分布来确定应力强度因子.拟合表达式可表示为

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + \sum_{n=1}^N a_n r^{n-0.5} \quad (5)$$

其中 σ_y 为裂纹尖端沿裂纹前沿方向上垂直于裂纹面的应力(对二维裂纹体, σ_y 即为图1坐标系下的 σ_y ;对三维裂纹体, σ_y 为图2坐标系下的 σ_z), r 为裂纹前沿方向上一点与裂纹尖端的距离,应力强度因子 K_I 为拟合系数, N 为非奇异项总数.

由于上述方法是通过拟合有限元法计算得到

的实际裂纹体裂纹尖端的弹性应力分布来确定应力强度因子 K_I , 为区别于其他方法, 本文将其称之为应力拟合法(stress fitting method, SFM)。

无限大板中心穿透裂纹承受远端均匀拉伸载荷时, 应力沿裂纹前沿方向上 ($\theta=0^\circ$) 的理论分布为

$$\sigma_y = \frac{\sigma(r+a)}{(r^2+2ar)^{0.5}} \quad (6)$$

其裂纹尖端 $0 < r < a$ 范围内的奇异项应力分布与实际应力分布, 如图 3 所示。计算表明, 在距离裂纹尖端 $0.02a$ 的位置, 应力奇异项与实际应力的相对误差仅有 1.48%, 在距离裂纹尖端 $0.02a$ 的位置, 相对误差为 12.6%, 在距离裂纹尖端 a 的位置, 相对误差达到 38.8%。说明奇异项只能代表裂纹尖端附近极小区域内的实际应力分布, 也说明单独采用奇异项来计算裂纹尖端的应力强度因子时, 需要采用足够细密的网格, 才能得到较高的计算精度。

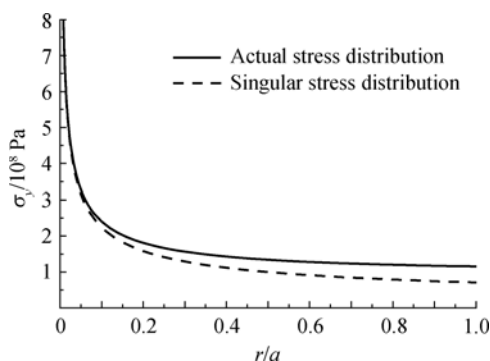


图 3 裂纹尖端的应力分布

Fig. 3 Stress distribution of the crack tip

但根据 Williams 级数展开理论可以看出, 奇异项后加上几项非奇异项后的多项式能够代表裂纹尖端更广的实际应力分布。若采用奇异项加上几项非奇异项后的多项式来计算裂纹尖端的应力强度因子时, 可能会降低对网格的需求。

实际裂纹体中裂纹尖端附近的应力分布往往是通过有限元法计算所得, 计算结果可以直接反映裂纹尖端的应力状态。所以正如节点力法和应力外推法, 直接采用有限元计算结果得到应力强度因子就不需要预先假设裂纹尖端的应力状态。

本文根据 Williams 级数展开多项式形式的特性, 提出了一种新的一般性的考虑裂纹尖端三维效应的应力强度因子计算方法。

1.3 理论数据验证

为了对应力拟合法进行初步验证, 并确定拟

合表达式中非奇异项项数和应力数据节点范围(如图 4)。本文采用式(6)中的理论应力数据对应力拟合法进行了验证。

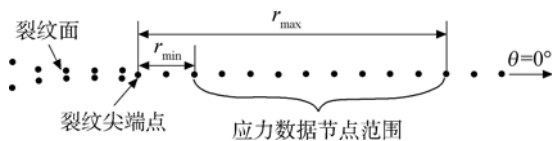


图 4 应力数据节点范围

Fig. 4 Range of stress-data-node

首先采用不同的 N 对 $0.15a \sim 2a$ 内的 (r, σ_y) 进行了拟合, 并与应力外推法和理论 K 进行了对比, 见表 1。其中应力强度因子单位为 $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$, K_{sfm} 表示应力拟合法结果, K_{sem} 表示应力外推法结果, δ_{sem} 表示应力外推法与理论 K 的相对误差, δ 表示应力拟合法与理论 K 的相对误差。

表 1 非奇异项对应力拟合法的影响

Table 1 Effect of non singular item on SFM

Theory $K /$ ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$K_{\text{sem}} /$ ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$\delta_{\text{sem}} /$ %	N	$K_{\text{sfm}} /$ ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$\delta /$ %
			0	25.464	43.67
			1	18.565	4.74
17.725	18.977	7.07	2	17.877	0.82
			3	17.757	0.20
			4	17.732	0.03

由表 1 看出, 拟合表达式加上非奇异项后应力拟合法的相对误差减小, 随着非奇异项数的增加, 拟合结果不断趋近于精确解。这种收敛性不仅能说明应力拟合法的正确性, 也说明非奇异项能够显著提高应力拟合法的计算精度。虽然 $N=0$ (仅含奇异项) 时应力拟合法的误差远大于应力外推法的误差, 但加上非奇异项后, 应力拟合法的误差就远小于应力外推法的误差, 说明在相同的应力数据下, 含非奇异项的应力拟合法相对于应力外推法精度更高。

可以看出当 $N=2$ 应力拟合法的相对误差已经很小, 所以在保证 K_I 有足够精度的基础上, 为了提高 SFM 的拟合效率, 选用 $N=2$ 即可。

随后为了确定合适的拟合应力数据范围, 本文采用 $N=2$ 的拟合表达式分别对不同 r 范围(如图 4)内的应力数据进行了拟合, 得到了应力强度因子并与理论 K 进行了对比, 见表 2。

表2 数据范围对含非奇异性项应力拟合法的影响
Table 2 Effect of the data area on SFM including nonsingular items

Theory K_I / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	Range of r	K_{sfm} / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$\delta/\%$
17.725	$0.0015a \sim 2a$	17.728	0.02
	$0.15a \sim 2a$	17.877	0.86
	$0.2a \sim 2a$	17.921	1.11
	$1.5a \sim 2a$	18.924	6.77
	$0.15a \sim a$	17.775	0.2861
	$0.15a \sim 0.5a$	17.740	0.0892

由表2看出, (r, σ_y) 应力数据越靠近裂纹尖端, 采用 $N=2$ 的拟合表达式所得到的应力强度因子精度越高. 但进行有限元法计算节点应力数据时, 第一个邻近裂纹尖端的单元尺寸不宜过小, 否则将严重影响有限元法的计算效率. 综合考虑 r 位于 $0.2a \sim 2a$ 时应力拟合法有很高的精度, 以及有限元节点应力数据相对于理论数据存在的误差, 所以初步确定应力拟合法合适的应力数据节点范围为: 距裂纹尖端最近的节点与裂纹尖端点的距离 $r_{\min}$ 不超过 $0.2a$; 距离裂纹尖端最远的节点与裂纹尖端点的距离 $r_{\max}$ 不超过 $2a$.

归纳理论数据验证得到一个合理高效的应力拟合法操作方案: ①采用裂纹尖端应力 σ_y 的 $N=2$ Williams 级数展开作为拟合表达式. ②采用应力数据节点范围: 距裂纹尖端最近的节点与裂纹尖端点的距离 $r_{\min}$ 不超过 $0.2a$; 距离裂纹尖端最远的节点与裂纹尖端点的距离 $r_{\max}$ 不超过 $2a$.

2 算例验证

为了进一步验证应力拟合法的正确性, 本文先后采用应力拟合法计算了二维大板中心穿透裂纹、无限大体埋圆裂纹、三维有限厚板中心穿透裂纹, 在承受远端均匀拉伸载荷下的应力强度因子. 并与理论解、应力外推法 (stress extrapolation method, SEM)、平面应变和平面应力假设条件下的位移外推法 (displacement extrapolation method, DEM)、1/4 节点张开位移法 (quarter point opening displacement, QPOD) 的计算结果进行了对比.

2.1 二维大板中心穿透裂纹

对于理想的二维裂纹, 裂纹尖端的应力状态极端假设为平面应力或平面应变状态. 本文分别

采用 DEM, QPOD 和 SFM 计算了二维大板内中心穿透裂纹 (如图5) 的 K_I 并与理论应力强度因子进行了对比.

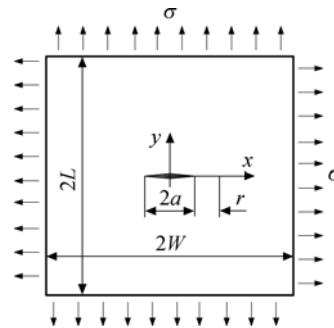


图5 二维大板中心穿透裂纹

Fig. 5 Center through crack in 2-D infinite plate

其中二维大板半宽 $W=0.2\text{ m}$, 半长 $L=0.2\text{ m}$, 裂纹半长 $a=0.01\text{ m}$, 所承受四周均匀拉伸载荷为 $\sigma=100\text{ MPa}$, 弹性模量 $E=240\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.3$. 无限大板内中心穿透裂纹的理论解为 $K_I = \sigma \sqrt{\pi a} = 17.725\text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$.

为了提高有限元法的计算效率, 本文采用了文献[15]中的分网方法. 将裂纹体划分为3个区域分别分网: ①裂纹尖端区域采用类似于蛛网的奇异单元分网; ②远离裂纹尖端区域采用较粗的三角形单元分网; ③过渡区靠近裂纹尖端, 采用精度较高的四边形单元分网. 二维大板中心穿透裂纹的1/4对称模型以及三个区域的网格如图6所示. 其中, 单元类型为平面应力单元.

图6中奇异单元尺寸 l 决定了裂纹尖端区域网格的细密程度, 也决定了有限元节点应力数据范围靠近裂纹尖端的程度. 因此本文分别计算了不同 l 的 K_I , 计算结果见表3.

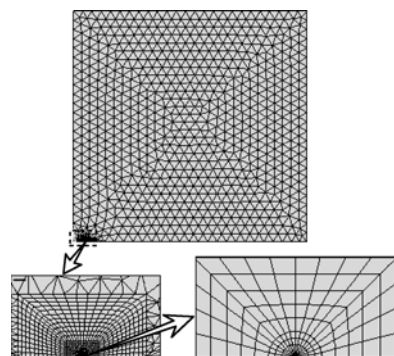


图6 二维大板中心穿透裂纹的有限元模型

Fig. 6 Finite element model of the center through crack in 2-D infinite plate

表 3 二维大板中心穿透裂纹在不同奇异元尺寸下的 K_I Table 3 K_I of the center through crack in 2-D infinite plate under different singular element sizes

Theory K_I / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	l	Range of r	K_{sfm} / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$\delta/\%$	K_{sem} / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$\delta_{\text{sem}}/\%$
17.73	$0.2a$	$0.3a \sim 0.8a$	17.343	-2.16	18.258	3.01
	$0.1a$	$0.15a \sim 0.8a$	17.556	-0.95	18.046	1.81
	$0.01a$	$0.015a \sim 0.8a$	17.610	-0.65	17.877	0.86

由表 3 看出,随着奇异元尺寸的减小,应力数据范围靠近裂纹尖端,应力拟合法和应力外推法的精度不断提高.在本文推荐的 r 范围 $0.15a \sim 0.8a$ 下,应力拟合法相对理论应力强度因子的误差在 1% 以内.在同一 r 范围的条件下,应力拟合法的精度高于应力外推法的精度.不仅说明了应力拟合法的正确性,也表明在同一网格尺寸下应力拟合法比应力外推法更有优势.

实际工程中大多数含裂纹结构并不能简化为二维平面应力或平面应变裂纹体,所以有必要针对三维裂纹体来验证应力拟合法的正确性.

2.2 三维无限大体内埋圆裂纹

裂纹面内承受均布载荷下的无限大体内埋圆裂纹(如图 7)是具有理论解的三维裂纹问题.虽然不是一种普遍的三维问题,但以其为例来验证应力拟合法的正确性是非常有必要的.

为了保证裂纹尖端应力场不受裂纹体边界的影响,Raju 和 Newman^[7]指出裂纹体 H 与 W 应足够大,并建议 $H/a, W/a$ 在 5 以上.本文取 $H=W=0.2\text{ m}$,圆裂纹半径 $a=0.002\text{ m}$,裂纹面承受均布载荷 $\sigma=100\text{ MPa}$,弹性模量 $E=240\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$.无限大体内埋圆裂纹的精确解为:
 $K_I=2\sigma\sqrt{a/\pi}=5.046\text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$.

为了提高计算效率,本文建立了 $1/8$ 有限元模型:裂纹尖端采用奇异单元划分,远端采用较粗的四面体等参元划分,近裂纹区采用六面体等参

元划分,如图 8 所示.分别采用 3 种方法计算了不同 l 的 K_I ,计算结果见表 4.

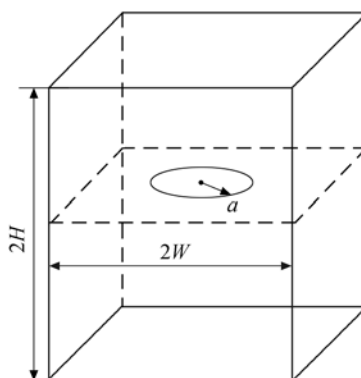


图 7 无限大体内埋圆裂纹

Fig. 7 An embedded circular crack in infinite body

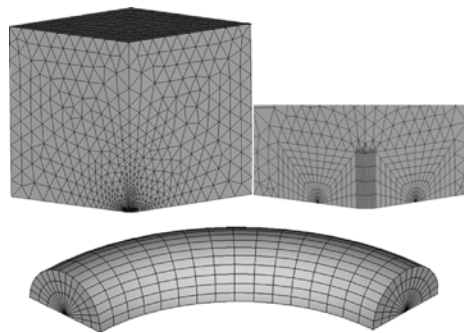


图 8 无限大体内埋圆裂纹的有限元模型

Fig. 8 Finite element model of the embedded circular crack in infinite body

表 4 无限大体内埋圆裂纹在不同奇异单元尺寸下的 K_I Table 4 K_I of the embedded circular crack in infinite body under different singular element sizes

Theory K_I / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	l	Range of r	K_{sfm} / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$\delta/\%$	K_{sem} / ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)	$\delta_{\text{sem}}/\%$
5.05	$l=0.1a$	$0.15a \sim 0.8a$	5.02	-0.52	5.37	6.34
	$l=0.05a$	$0.075a \sim 0.8a$	5.02	-0.52	5.31	5.15
	$l=0.01a$	$0.015a \sim 0.8a$	5.02	-0.52	5.23	3.56

由表4看出,随着裂纹尖端奇异元尺寸不断减小,应力数据范围不断靠近裂纹尖端,应力外推法的精度不断减小,而应力拟合法已经达到收敛。应力拟合法的误差仅为0.52%,而应力外推法的误差最小为3.56%,最大为6.34%。可以得到与上一算例相同的结论:这一算例不仅说明了应力拟合法的的正确性,也表明在同一网格尺寸下应力拟合法比应力外推法更有优势。

2.3 三维有限厚板中心穿透裂纹

许多学者发现三维有限厚板中心穿透裂纹(如图9)裂纹尖端场沿厚度方向具有非常复杂的行为。Camas等^[16-17]通过有限元法得到了裂纹尖端塑性区尺寸沿厚度方向的演变,结果发现这种演变并不是由内部平面应变状态过渡到表面平面应力状态所形成的“狗骨头”形状。这种现象表明三维有限厚板中心穿透裂纹前沿的应力状态沿厚度方向是变化的,所以不能单纯以两种极限状态来计算 K_I 。

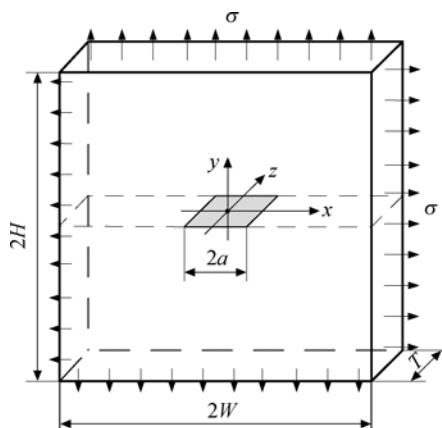


图9 三维有限厚板中心穿透裂纹

Fig. 9 Center through crack in 3-D finite thickness plate

本文分别采用平面应变和平面应力假设条件下的DEM和QPOD以及SFM分别计算了三维有限厚板中心穿透裂纹在不同厚度条件下,沿厚度方向变化的 K_I ,并对计算结果进行了对比分析。

本文采用裂纹体半宽 $W=0.2\text{ m}$,半高 $H=0.2\text{ m}$,裂纹半长 $a=0.01\text{ m}$,所承受四周均匀拉伸应力为 $\sigma=100\text{ MPa}$,弹性模量 $E=240\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$ 。根据紧凑拉伸(CT)试样疲劳裂纹扩展速率试验推荐的厚度范围 $4 \leq W/T \leq 20$ 和金属平面应变断裂韧性试验推荐的厚度范围 $2 < W/T < 4$,选取不同厚度 $W/T=2.5, 5, 10, 50, 100$ 作为算例。

分别建立了不同厚度下裂纹体的1/8有限元模型,同样划分3个区域进行分网,裂纹尖端采用奇异单元划分,远端采用较粗的四面体等参元划分,近裂纹区采用六面体等参元划分,其网格形式如图10所示。

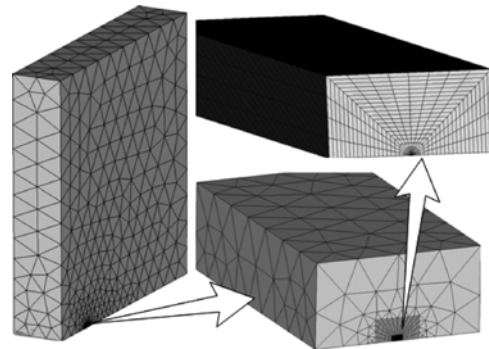


图10 三维有限厚板中心穿透裂纹的有限元模型

Fig. 10 Finite element model of center through crack in 3-D finite thickness plate

本文将从3个方面对应力拟合法应用于三维有限厚板中心穿透裂纹时的特性进行说明。

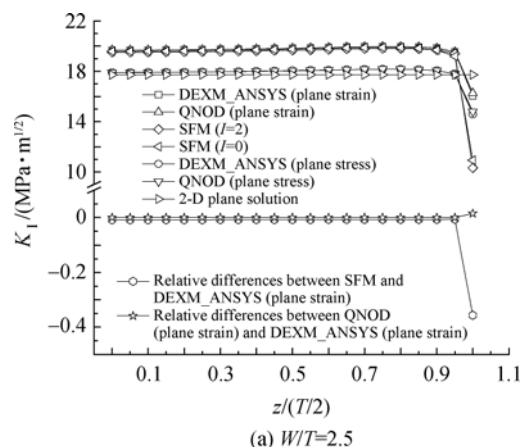
2.3.1 应力拟合法与其他方法的对比

同一奇异元尺寸条件下,分别采用3种方法计算了三维有限厚板中心穿透裂纹沿厚度方向分布的 K_I ,如图11所示。其中奇异元尺寸为 $l=0.001a$, $z/(T/2)=0$ 表示有限厚板中心面。“2-D plane solution”表示将有限厚板简化为二维平面模型所得到的应力强度因子。

分析图11中的结果可以得到

1) 平面应变假设下的QPOD与DEM的相对差异,在裂纹体近表面区最大为2.3%,在中心区最大为0.1%,说明这两种方法的计算结果能够相互验证,可以作为应力拟合法的评价标准。

2) 当 $W/T=2.5$ 时,在 $z/(T/2) < 0.9$ 的区



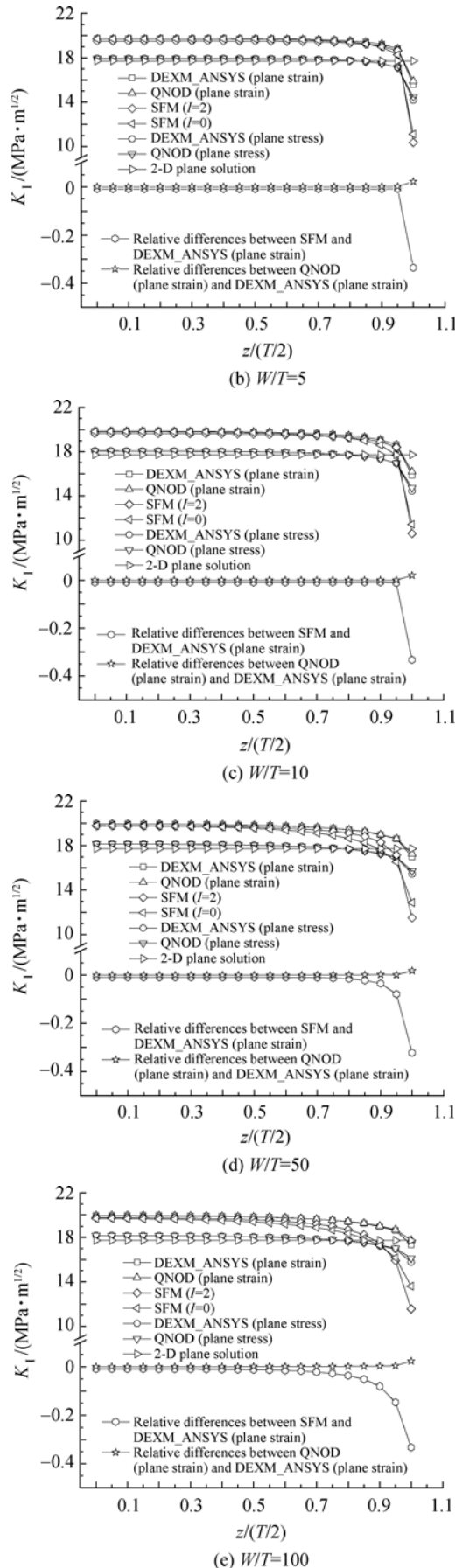


图11 不同方法之间的对比

Fig. 11 Comparison between different methods

域,平面应变假设下的 QPOD, DEM 以及应力拟合法所得的 K 分布均近似为直线. 在直线范围内, QPOD 相对 DEM 的最大差异只有 0.02%, 应力拟合法相对 DEM 的最大差异只有 0.88%. 3 条直线基本重合说明此时裂纹尖端的应力状态绝大部分为同一应力状态——平面应变状态. 这种现象与平面应变断裂韧性试验的平面应变假设一致, 所以能够反映出应力拟合法的合理性.

3) 对于所有的 W/T , 当裂纹前沿位于裂纹体中心部位区域时, 应力拟合法与 DEM (平面应变假设) 的相对差异在 1% 以内, K 分布基本重合. 随着 W/T 的减小, 两种方法的重合区域不断减小, 说明随着裂纹体厚度的减小, 平面应变控制的区域也不断减小, 这种现象与传统的认识是一致的. 当裂纹前沿位于裂纹体表面时, 应力拟合法的结果远远小于 DEM, 相对差异均达到 35% 左右. Hartranft 和 Sih^[18] 曾提出, 应力强度因子在靠近自由边界内的一个很小的区域内下降的非常的剧烈, 在自由表面下降为零, Raju 和 Newman^[5] 不仅证实了这样的说法同时也指出内部的应力强度因子对表面的状态不敏感. 图中应力拟合法得到的 K 分布, 在裂纹体内部靠近中心的区域变化不大, 而在靠近裂纹体表面的区域下降的非常的剧烈, 这种现象与 Raju 和 Newman 的说法完全相符. 而平面应变或平面应力假设条件下的 DEM 和 QPOD 没有这样的变化趋势. 这一结果说明应力拟合法能够反映裂纹前沿应力状态随厚度的变化, 也能够准确地呈现出裂纹前沿 K 随应力状态的变化趋势. 说明应力拟合法能够在不假设裂纹前沿应力状态的前提下准确的计算裂纹前沿的应力强度因子, 比其他方法更有优势.

4) 对于所有的 W/T , 当裂纹前沿位于靠近有限厚板裂纹体中心部位的区域时, 应力拟合法与二维平面解之间相对差异达到 11.5%, 平面应变假设下的位移外推法与二维平面解相对误差达到 12%. 说明对于不同厚度的三维裂纹问题不能简单的简化成二维平面模型进行 K 的计算. 同时从图中发现, 平面应力假设下的 DEM 和 QPOD 与二维平面解接近, 它们在靠近中心区域的相对差异在 2.5% 以内. 虽然这种差异很小, 但是这种“接近”没有物理基础.

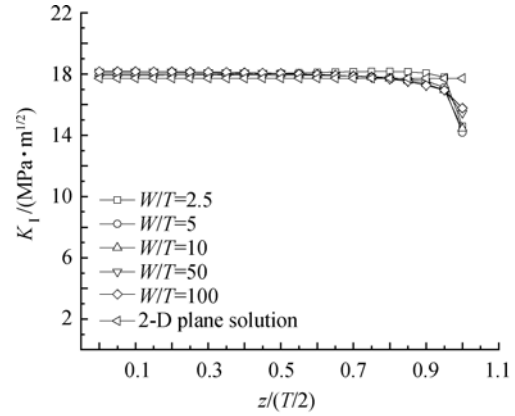
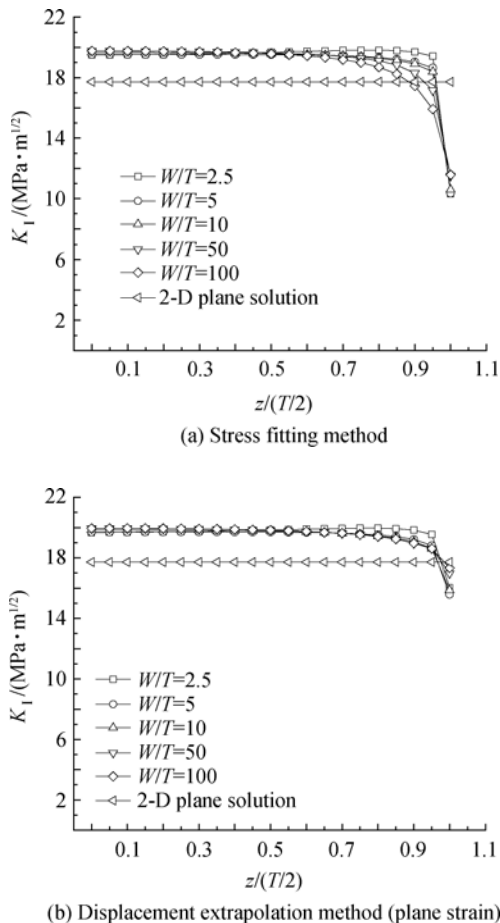
综上所述: 在裂纹体表面上, 裂纹前沿的应力状态并不是单纯的平面应力状态; 裂纹体内部靠近中心的区域接近为平面应变状态; 靠近裂纹体表面的区域应力状态即不是平面应力状态, 也不

是平面应变状态. 但不论裂纹前沿何种应力状态, 应力拟合法都能够在不假设应力状态的条件下准确地计算裂纹体的应力强度因子.

2.3.2 厚度效应

传统认为, 薄板的裂纹前沿可以假设为平面应力状态, 厚板的裂纹前沿可以假设为平面应变状态. 为了研究厚度对裂纹前沿应力状态的影响, 本文分别绘制了 SFM、平面应变和平面应力假设条件下的 DEM 三种情况下, 裂纹前沿 K 随厚度的变化曲线, 如图 12 所示.

由图 12 看出, 随着裂纹体厚度的增加, 裂纹体近表面区域内的 K 分布由“陡增过渡为水平直线”逐渐变为“圆滑曲线”, 但最终都在裂纹体近中心区域接近汇合为一条水平线. 这种现象说明, 当裂纹体厚度较大时, 裂纹前沿绝大部分为平面应变状态. 随着 W/T 的减小, 平面应变控制区域减小, 但并不是平面应力控制区增大, 而是过渡状态区域增大. 说明厚板在超过一定厚度后可以假设为平面应变状态, 而薄板只有在极其薄的情况下才能假设为平面应力状态. 而工程中最常见的应力状态是过渡区较宽和以平面应变控制为主的多



(c) Displacement extrapolation method (plane stress)

图 12 不同厚度下两种方法的计算结果

Fig. 12 Computed results of the two methods under different thicknesses

样应力状态的裂纹体. 所以无需预先假设裂纹尖端的应力状态, 便能准确地计算裂纹前缘的应力强度因子的应力拟合法是非常必要的.

2.3.3 奇异元尺寸对应力拟合法的影响

Raju 和 Newman 在对节点应力法^[7]进行评判时, 指出关于网格尺寸的收敛性是说明节点应力法正确性的关键指标. 下面本文将对应力拟合法关于网格尺寸的收敛性进行评价. 以 $W/T=5$ 为例, 分别采用裂纹尖端奇异元半径为 $l=0.001a$, $0.05a$ 和 $0.1a$ 进行分网. 然后采用 $N=2$ 和 $N=0$ 时的应力拟合法对裂纹前缘的应力强度因子进行了计算, 计算结果如图 13 所示.

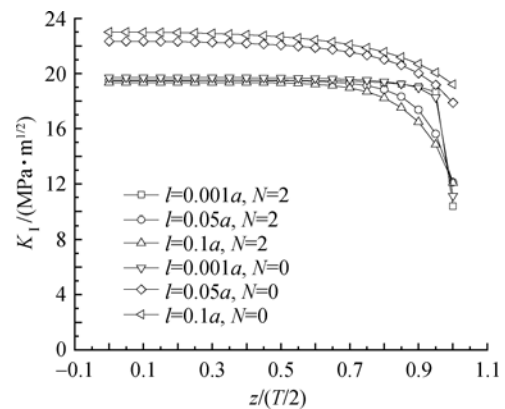


图 13 不同奇异单元尺寸下应力拟合法的计算结果

Fig. 13 Computed results of the SFM under different singular element sizes

从图 13 中可以看出, ①不论对于 $N=0$ 还是对于 $N=2$ 的应力拟合法, 随着奇异单元尺寸的增加 K 分布曲线都逼近于同一条曲线的趋势. 说明随着网格尺寸的减小, 应力拟合法达到收敛. 足

以说明应力拟合法的的正确性. ②应力拟合法中 $N=0$ 比 $N=2$ 对奇异单元网格尺寸的要求更高, 为了避免分网和计算的复杂性, 在保证计算精度的前提下, 采用 $N=2$ 的应力拟合法更方便. ③对于 $I=2$ 的应力拟合法, 在 $l=0.1a$ 与 $l=0.001a$ 两种条件下 K 的相对差异, 在裂纹体中心区域内仅有 0.92% , 在裂纹体表面区域达到 20.5% . 说明应力拟合法在裂纹体近表面区对网格的敏感性较大, 在中心部位区对网格的敏感性较小. 这一现象对有限元法分网工作具有很大的指导意义.

3 结 论

本文提出一种基于无限大体裂纹尖端弹性应力场理论解的前几项多项式函数, 对实际裂纹体弹性应力场有限元解进行拟合来计算应力强度因子的方法. 该方法在计算应力强度因子时不需要预先假设裂纹尖端的应力应变状态, 应力强度因子计算结果更符合三维裂纹体裂纹尖端实际的应力应变状态. 本文得到结论如下:

1) 基于二维无限大板中心穿透裂纹应力场理论解验证了方法的有效性, 探讨了拟合确定应力强度因子需要的多项式应力函数的项数.

2) 分别以二维大板中心穿透裂纹、三维大体内埋圆裂纹和三维有限厚板中心穿透裂纹的应力强度因子计算为例, 通过与无限大板和无限大体应力强度因子理论解、应力外推法以及基于位移外推法和 $1/4$ 节点张开位移法的应力强度因子有限元解的对比分析, 验证了本文方法的有效性和合理性. 研究表明本文方法能够合理反映三维裂纹体裂纹尖端的实际应力应变状态, 计算得到的应力强度因子数值更合理.

参考文献:

- [1] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [2] Tada H, Paris P C, Irwin G R. The stress analysis of cracks handbook[M]. St. Louis, Missouri, USA: Paris Production Incorporated, 1985.
- [3] Murakami Y. Stress intensity factors handbook[M]. Oxford: Pergamon Press, 1992.
- [4] Fehrl B D, Truman K Z. An evaluation of fracture mechanics quarter point displacement techniques used for computing stress intensity factors[J]. Engineering Structures, 1999, 21(5): 406-415.
- [5] Raju I S, Newman J C. Three-dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens[R]. NASA TN D-8414, 1977.
- [6] 解德, 钱勤, 李长安. 断裂力学中的数值计算方法及工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [7] Raju I S, Newman J C. Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1977, 11(4): 817-829.
- [8] James M A, Newman J C. The effect of crack tunneling on crack growth: experiments and CT0A analyses[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70(3): 457-468.
- [9] ASTM International. ASTM E399-09 standard test method for linear-elastic plane-strain fracture toughness K_{Ic} of metallic materials[S]. West Conshohocken, PA: American Society for Testing and Materials, 2009.
- [10] Garcia-Manrique J, Camas D, Lopez-Crespo P, et al. Stress intensity factor analysis of through thickness effects[J]. International Journal of Fatigue, 2013, 46: 58-66.
- [11] Lin X B, Smith R A. Shape evolution of surface cracks in fatigued round bars with a semicircular circumferential notch[J]. International Journal of Fatigue, 1999, 21(9): 965-973.
- [12] Bao R, Yang H, ZHANG J, et al. Fatigue crack growth measurement in a superalloy at elevated temperature[J]. International Journal of Fatigue, 2013, 47(1): 189-195.
- [13] Williams M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, 24(1): 109-114.
- [14] Sneddon I N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1946, 187(1009): 229-260.
- [15] Bremberg D, Dhondt G. Automatic mixed-mode crack propagation based on a combined hexahedral-tetrahedral approach[J]. Key Engineering Materials, 2007, 348/349: 581-584.
- [16] Camas D, Garcia-Manrique J, Gonzalez-Herrera A. Crack front curvature: influence and effects on the crack tip fields in bi-dimensional specimens[J]. International Journal of Fatigue, 2012, 44(44): 41-50.
- [17] Camas D, Garcia-Manrique J, Gonzalez-Herrera A. Numerical study of the thickness transition in bi-dimensional specimen cracks[J]. International Journal of Fatigue, 2011, 33(7): 921-8.
- [18] Hartranft R J, Sih G C. An approximate three dimensional finite element analysis of finite thickness fracture specimens[J]. International Journal of Engineering Science, 1970, 8(8): 711-729.

(编辑: 秦理曼)